**ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**

**по проведению I этапа республиканской олимпиады**

**учащихся VIII -XI классов по математике**

**в 2018/2019 учебном году**

Задания для проведения республиканской олимпиады по математике для учащихся VIII -XIклассов представлены пятью задачами в каждом из классов.

Задания сопровождаются ответами и решениями. Рекомендуемое максимальное число баллов, которое может быть выставлено за правильное решение каждой задачи (решение может не совпадать с приведенным), представлено в таблице.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер задания | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Рекомендуемая «стоимость» задания в баллах | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| Максимальная сумма баллов | 50 баллов | | | | |

Меньшее число баллов может быть выставлено за неполное, недостаточно обоснованное решение. Число баллов снижается и в том случае, когда участник олимпиады, записав правильный ответ, не привёл решение задачи. В случае угадывания ответа рекомендуется выставлять не более половины баллов, предусмотренных за выполнение соответствующего задания. При ошибочном решении баллы не начисляются.

Решение в каждом конкретном случае принимает жюри предметной олимпиады.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Методист УМК |  | Н.В.Евтерёва |
|  |  |  |
|  |  |  |

Решения I этапа республиканской олимпиады

по учебному предмету «Математика», 2018/2019 учебный год

**VIII класс**

1. Ответ**:** такое число единственное и равно 36.

Решение.Действительно, должно выполняться равенство 10а + *b = 2ab,* где *а* и *b* — цифры данного числа. Очевидно, что *b -* четная цифра. Кроме того, 6 не равно 0, так как в противном случае и *а =* 0.

При *b = 2* имеем 10а + 2 = 4а, т. е. *а =* -1/3, что невозможно, так как *а —* цифра.

При *b = 4* имеем 10а + 4 = 8а, т. е. *а =* -2, что невозможно.

При *b* = 6 имеем 10а + 6 = 12а, т. е. а = 3, следовательно, искомое число 36.

При *b =* 8 имеем 10а + 8 = 16а, т. е. а = 4/3, что невозможно.

Другие варианты невозможны, следовательно, искомое число единственное и равно 36.

**2.** Отве**т**:67

Решение. Пусть *a*, *b* – цифры задуманного числа. Тогда из условий задачи , откуда *a* + *b* = 13. Учитывая, что *a*, *b* – цифры, отсюда получаем шесть возможных вариантов задуманного числа: 94, 85, 76, 67, 58, 49. Из этих вариантов только 67 простое число.

|  |  |
| --- | --- |
| **3.** Ответ: ∠ *FХЕ* *=* 75°.  Решение. Проведем отрезки *АС*, *АЕ* и *СХ*. Заметим, что  *∠ DСА = ∠САF* = 90°, поскольку градусная мера каждого угла правильного шестиугольника равна  = 120°, а *∆АВС* – равнобедренный с углом при основании равным 30°.  По условию ∠*ХСD*  = 45°, то есть ∠*АСХ* = 45°. Следовательно *∆АХС* прямоугольный равнобедренный и *АХ=АС.* |  |

Кроме того *АС=АЕ* ( *∆АВС=∆АFЕ*), то есть треугольник *АЕХ* – равнобедренный.

Так как ∠*ЕАХ* = 30°, то ∠*АЕХ* = ∠*АХЕ* = = 75°

**4.** Ответ: не может.

Решение. Заметим, что число 2*a* + 3*b* имеет ту же четность, что *b*, а число, 2*b* + 3*a* имеет ту же четность, что *a*. Поэтому после каждой операции на доске должно оставаться 5 четных и 5 нечетных чисел (т.к. вначале было 5 четных и 5 нечетных). Значит все 10 чисел одинаковой четности получиться не могут.

**5.** Ответ: 60 секунд.

Решение.Предположим, что мы не заменяли какие-то две лампочки. Тогда, если нам не повезло и одна из них − перегоревшая, то мы не сможем определить, какая именно. Значит, для того, чтобы заведомо определить перегоревшую лампочку, необходимо вывинтить хотя бы три из них (30 секунд) и завинтить на их место какие-то другие (ещё 30 секунд). Покажем, что 60 секунд всегда хватит. Вывинтим первую лампочку и завинтим на её место запасную (прошло 20 секунд). Если гирлянда загорелась, то нам повезло и хватило даже 20 секунд. Если же гирлянда не загорелась, значит, единственная неисправная лампочка ещё в гирлянде, а у нас в руках опять исправная. Теперь вывинтим вторую и завинтим на её место бывшую первую (в сумме прошло 40 секунд). Если нам опять не повезло, то вывинчиваем третью лампочку, а на её место завинчиваем бывшую вторую (в сумме прошло 60 секунд). Если гирлянда всё ещё не горит, то, значит, неисправна последняя лампочка.

Решения I этапа республиканской олимпиады

по учебному предмету «Математика», 2018/2019 учебный год

**IX класс**

**1**. Ответ: 1

Решение

Домножим обе части равенства из условия на , получим:



При переходе к последнему равенству мы воспользовались тем, что по условию . Следовательно, вынося  за скобки, получаем: . Из равенства  следует, что , поэтому , или .

**2**. Ответ:74547 : 24849.

Решение. РОТОР =3 · СОКОЛ. Ясно, что P≥3. Кроме того, P не делится на 3 (иначе C = Л) и P ≠5 (иначе Л = 5). Значит, остаются варианты P = 4, Р = 7, Р = 8.

1. Пусть P = 4. Тогда Л = 8. Из разряда единиц в разряд десятков переносится 2, то есть 3O оканчивается цифрой, на 2 меньшей O. Значит, O = 4 = P или O = 9, тогда 3O даёт перенос 2 в старший разряд и P*>*4. Противоречие.

2. Пусть P = 7. Тогда *C* = 2, Л = 9, O снова равно 4. Число 3K даёт перенос 2 в следующий разряд, значит, K=8. Теперь Т легко находится.

3. Пусть P=8. Тогда Л=6, а 3O оканчивается цифрой, на 1 меньшей O. Но таких цифр нет.

**3.** Ответ: а) 43% и 48%; б) 37,5 мл.

Решение. *Первое решение* (*алгебраическое*). а) Пусть в результате переливаний доля кислоты стала (40 + *p*)% в первом стакане и (50−*q*)% − во втором. Объём кислоты в первом стакане увеличился при этом на *p* мл, а во втором − уменьшился на = . Отсюда 2*p* =3*q*.

А поскольку ясно, что 40+ *p<*50−*q*, т. е. *p* + *q <* 10, условиям задачи удовлетворяет ровно одна пара натуральных чисел: *p*=3, *q*=2.

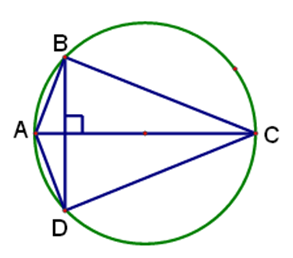
Итак, доля кислоты во втором стакане стала 48%, а в первом 43%.

б) Обозначим вместимость ложки через *V*. Так как после первого переливания во втором стакане стало 75 + 0,4*V* мл кислоты в 150+*V* г раствора, *V* находится из уравнения: = 0,48.

*Второе решение* (*арифметическое*). а) Назовём первый раствор *вином*, а второй − *уксусом*. Как известно, в результате переливаний объём уксуса в вине равен объёму вина в уксусе. Назовём этот объём *ложечкой* (ложечка, разумеется, меньше ложки). Таким образом, вместо переливаний в условии можно отлить от каждого раствора по ложечке, а потом эти ложечки поменять местами. При вместимости ложечки в 10 мл мы забираем из первого стакана 4 мл кислоты, а возвращаем 5 мл. При этом объём кислоты в первом стакане увеличивается на 1 мл, а доля − на 1%. Во втором тот же 1 мл составляет %. Следовательно, чтобы обе доли выражались целым числом процентов, придётся взять ложечку в 30 мл (при 60 мл обе доли сравняются − по 46%, что по условию невозможно). Тогда доля в первом стакане возрастёт до 43%, а во втором − снизится до 48%.

б) В итоге во втором сосуде находится 30 мл вина − объёма. Значит, и после первого переливания вино в нём составляло пятую часть. Обратно мы перелили 30 мл уксуса, значит, вместимость ложки составляет · 30=37,5 мл.

**4.** Ответ нет.

Рассмотрим в окружности диаметр АС и перпендикулярную ему хорду ВD, не проходящую через центр (см. рисунок). Покажем, что четырехугольник АВСD удовлетворяет условию задачи. Для этого достаточно доказать, что в него можно вписать окружность. В окружности диаметр делит перпендикулярную ему хорду пополам, значит, в треугольнике ВАD высота является медианой и этот треугольник является равнобедренным: АВ = АD. Аналогично, СВ = СD. Так как суммы противоположных сторон четырехугольника АВСD равны, в него можно вписать окружность.

**5.** Ответ: 10**.**

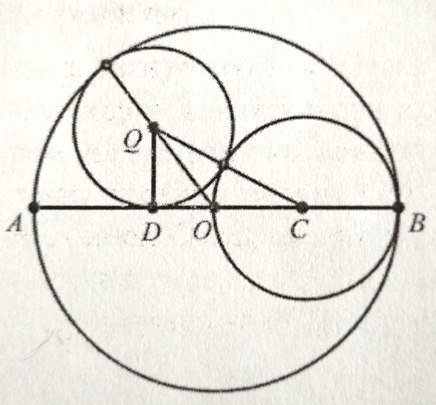
Решение. Пусть в турнире участвовало n человек. Всего было сыграно партий. Если бы все участники набрали поровну очков, то у каждого было бы очков. Поскольку победитель набрал больше очков, чем каждый из остальных участников, то каждый непобедитель получил меньше, чем , т. е. не больше - = очков. Поэтому победитель получил не меньше - () = n − 1 очка — максимум при *n* участниках. Так как у победителя 9 очков, то n − 1 = 9, откуда n = 10.

Решения I этапа республиканской олимпиады

по учебному предмету «Математика», 2018/2019 учебный год

**X класс**

1. Ответ: 1.

Решение. Пусть *х*0 – общий корень этих уравнений, то есть выполнены равенства 2018*х0*2 + *рх0* + *q*= 0 и *px0*2 + *qx0* + 2018 = 0. Умножим обе части первого уравнения на число *х*0 и вычтем второе уравнение. Получим уравнение-следствие: 2018*х*03 – 2018 = 0, откуда *х*0 = 1. При подстановке этого корня в любое из исходных уравнений получим равенство *p* + *q* + 2018 = 0. Это означает, что при *p* + *q* = – 2018 оба уравнения действительно имеют общий корень, равный 1, а если эта сумма равна другому числу, то общих корней нет.

1. Ответ: 8 см.

Решение. Обозначим искомый радиус через *х*. Пусть точки *С* и *Q* – соответственно центры меньшего полукруга и вписанного круга, *D* – точка касания вписанного круга с диаметром *АВ*. В силу касания круга и большего полукруга луч *ОQ* проходит через точку касания, значит *ОQ* = 18 – *х*. Так как круг касается меньшего полукруга, то отрезок *СQ* проходит через точку касания и значит *СQ* = 9 + *х*. Так как круг касается отрезка АВ, то отрезок *QD* равен *х* и является высотой треугольника *QОС*. В треугольнике *QОС* через *х* выражены все три стороны и высота.

Найдем двумя способами его площадь. Полупериметр треугольника равен  и по формуле Герона его площадь равна . Эта же площадь равна половине произведения стороны на проведенную к ней высоту, то есть . Из уравнения  находим *х* = 8.

1. Решение. Проведем равносильные преобразования

(1 + *х*3+ *х*4)2 = (1 + *х*2+ *х*3)(1 + *х*4 + *х*5)

1 + *х*6 + *х*8 + 2*х*3 + 2*х*4 + 2*х*7 = 1 + *х*2 + *х*3 + *х*4 + *х*6 + *х*7 + *х*5 + *х*7 + *х*8,

*х*3 + *х*4 = *х*2 + *х*5,

*х*2(1 + *х*)(*х* – 1)2 = 0,

*х =* 0 или *х =* – 1 или *х* = 1.

При значениях 0 и – 1 все члены *ai* равны 1, а в третьем – все они равны 3. И во всех случаях равенство выполнено при *п* ≥ 3.

1. Ответ: 5 чисел.

Существует много наборов из пяти последовательных полупростых чисел, например 30 (13 +17), 31 (2 + 29), 32 (3 + 29), 33 (2 + 31), 34 (5 + 29) или 102 (5 +97), 103 (2 + 101), 104 (31 + 73), 105 (2 + 103), 106 (47 + 59). Покажем, что шести последовательных полупростых чисел не найдется.

В самом деле, среди любых шести последовательных чисел ровно три нечетных и эти нечетные возрастают с шагом 2. Если нечетное число представлено в виде суммы двух натуральных чисел, то среди слагаемых одно четное, а второе нечетное. Если оба слагаемых простые, то четное число обязано равняться 2. Значит, эти нечетные полупростые числа имеют вид 2 + *р*1, 2 + *р*2 и 2 + *р*3. При этом числа *р*1, *р*2 и *р*3 – последовательные нечетные. Но среди трех любых последовательных нечетных чисел одно делится на 3. Так как оно простое, то оно обязано равняться 3. Тогда одно из чисел равно 5, и полупростым не является, так как оно меньше 25. Противоречие.

1. Ответ: 3000 динаров.

Решение.

Способ 1. Пусть Али-баба положил такой набор золота и алмазов, который дает ему максимально возможную выручку – назовем такой мешок оптимальным. Тогда либо мешок набит под завязку, либо весит ровно 100 кг. В противном случае в него можно было бы доложить еще алмазов и выручка вырастет.

Рассмотрим первую ситуацию, когда мешок полон. Ясно, что в нем есть алмазы, поскольку полный вес мешка с золотом больше 100 кг. Заметим, что мешок, наполненный одним золотом, стоит 200 ∙ 20 = 40000 динаров, а одними алмазами – 40 ∙ 60 = 24000 динаров, поэтому равный объем золота дает больше прибыли, чем такой же объем алмазов. Если вес оптимального мешка меньше 100 кг, мы можем заменить немного алмазов на равное по объему количество золота (так чтобы вес мешка возрос, но не превзошел 100 кг). При этом стоимость мешка возрастет – противоречие с оптимальностью мешка. Итак, вес оптимального мешка ровно100 кг.

Предположим, что оптимальный мешок не полон. Тогда в нем есть золото, и Али-баба может часть его заменить на алмазы того же веса (при этом следя, чтобы объем не стал слишком большим). Так как килограмм алмазов дороже килограмма золота, прибыль Али-бабы возрастет – вновь противоречие с оптимальностью.

Значит мешок полон. Пусть в мешке *х* кг алмазов. Тогда в нем золота 100 – *х* кг. Алмазы занимают  часть мешка, золото – . Так как мешок полон, имеем равенство , откуда *х* = 25. Стоимость оптимального мешка равна 3000 динаров.

Способ 2. Пусть Али-баба положил в мешок *х* кг золота и *у* кг алмазов. Тогда он выручит 20*х* + 60*у* динаров. У Али-бабы два ограничения: во-первых, он не может нести более 100 кг, поэтому х + у ≤ 100. Во-вторых, такое количество золота и алмазов должно вместиться в мешок. Так как один килограмм золота занимает  мешка, а один килограмм алмазов – , возникает еще одно неравенство , то есть *х* + 5*у* ≤ 200. Кроме того, ясно, что переменные х и у неотрицательны. Решение задачи сводится к нахождению наибольшего значения выражения 20*х* + 60*у* на множестве всех пар неотрицательных чисел (*х*; *у*) удовлетворяющих системе неравенств 

Решения I этапа республиканской олимпиады

по учебному предмету «Математика», 2018/2019 учебный год

***XI класс***

1. Ответ: 1.

Решение. Можно заметить, что . Т.к. многочлен , имеет вид , то это возможно лишь в случае  при любых *х.*

1. Ответ: .

Решение.  - равнобедренный с углом  при вершине. Поэтому . Тогда  и опираются на отрезок ВС и лежат по одну сторону от прямой ВС, то вокруг четырехугольника *ABCD* можно описать окружность. Т.к. *BD* является биссектрисой угла *ABC,* то . Тогда  как опирающийся на ту же дугу. В результате .

1. Ответ: (7; 1; 4), (13; 11; 16).

Решение. Умножая первое уравнение на 5, второе – на (-3) и почленно складывая, получим . Т.к. числа *a+b* и *a-b* имеют одинаковую четность, а их произведение четно, то оба этих числа четны, причем . Поэтому возможны только три случая:

* 1.   и тогда из исходной системы находим *с=16*;
  2.  но тогда .
  3.  и тогда из исходной системы находим *с = 4*.

1. Ответ: .

Решение. Т.к. равенство из условия справедливо при любом *х*, то, заменяя *х* на *–х*, получим верное при всех действительных *х* равенство . Складывая полученное равенство с исходным, получим, что , или . Тогда исходное равенство принимает вид , откуда находим, что . Подставляя полученную функцию в исходное равенство, убеждаемся, что действительно получается тождество.

1. Ответ: 12 комиссий.

Решение. Обозначим фракции, содержащие 3, 4, 5 и 6 депутатов, через А, В, С и D соответственно. Заметим, что каждый депутат из фракции А может быть членом не более чем 4-х комиссий. В самом деле, если бы комиссий, членом которых является некоторый депутат *х* фракции А, было не менее 5-и, то среди них нашлось бы две, в которые входит один и тот же депутат (обозначим его *у*) из фракции В (поскольку в В только 4 депутата). Но тогда эти две комиссии имеют по 2 общих члена *х* и *у*, чего по условию задачи быть не может.

Так как во фракции А 3 депутата и каждая комиссия имеет хотя бы одного из них своим членом, а любой из этих 3-х депутатов, как доказано, может входить не более чем в 4 комиссии, то всего комиссий можно сформировать не более 3 ∙ 4 = 12.

Остаётся на примере показать, что 12 комиссий с соблюдением условий задачи сформировать можно. Пронумеруем в каждой фракции депутатов. Каждая из строящихся комиссий будет состоять из 4-х членов, её мы записываем как четвёрку, на 1-м, 2-м, 3-м и 4-м местах которой стоят депутаты из фракций А, В, С и D соответственно. Пример:

{1, 1, 1, 1}, {1, 2, 2, 2}, {1, 3, 3, 3}, {1, 4, 4, 4},

{2, 1, 2, 3}, {2, 2, 3, 4}, {2, 3, 4, 1}, {2, 4, 1, 2},

{3, 1, 3, 5}, {3, 2, 4, 3}, {3, 3, 5, 2}, {3, 4, 2, 1},

как видим, депутат 6 из фракции D даже не понадобился для составления комиссий.